Filippo Giordano **Cateto dispari A, il lato trainante delle terne pitagoriche**

La terna pitagorica è una terna di numeri naturali a, b, c, associata ai tre lati del triangolo rettangolo, tali che $a^2+b^2=c^2$. Il nome proviene dal teorema di Pitagora che afferma "la somma dei quadrati perfetti costruiti sui cateti di ogni triangolo rettangolo con lati interi è equivalente al quadrato perfetto costruito sull'ipotenusa". Il fatto che esistono infinite terne pitagoriche è stato dimostrato da Euclide nei suoi Elementi il quale ha fornito la formula in grado di trovarle tutte (anche se non esiste alcuno che possa vivere così tanto tempo da riuscire effettivamente a farlo).

Formule di Euclide:
con m>n,
$\mathbf{a}= m^2 – n^2$;
$\mathbf{b}= 2mn$;
$\mathbf{c}= m^2 + n^2$.

Per la realizzazione delle terne occorre distinguere che attribuendo sia a m che a n valori alternativi dispari, pari, (ad esempio m=7, n=4) oppure pari, dispari, (ad esempio m=6, n=5) a condizione che **m** ed **n** siano coprimi, cioè senza divisori comuni, allora si ottengono delle terne pitagoriche primitive, mentre, invece, se **m** ed **n** hanno dei divisori comuni (esempio: m=12 ed n=9) oppure se m, n sono entrambi dispari oppure entrambi pari si ottengono delle terne pitagoriche derivate, cioè terne i cui tre lati del triangolo hanno misure multiple di quelle di una terna pitagorica primitiva (esempio: 21, 28, 35, terna derivata dalla primitiva 3, 4, 5, in quanto 3x7=21, 4x7=28, 5x7=35).

Dalle formule associate da Euclide ai lati **a, b, c,** si ricava che i diversi valori di **m** ed **n** associati a ciascuno dei tre lati del triangolo appaiono quali costanti numeriche proporzionali che consentono sempre l'equazione $\mathbf{a^2+b^2=c^2}$, tuttavia, stante la natura delle formule, è impossibile attribuire ad **m** ed **n**, il valore di coppie di fattori dei rispettivi lati o di almeno uno di essi. Nel caso del cateto "**a**" il suo valore è stabilito dalla differenza di due quadrati perfetti dei quali uno pari e l'altro dispari. Nel caso del cateto "**b**" il valore è attribuito dal doppio del prodotto di **m** ed **n** mentre nel caso della ipotenusa il valore si ricava sommando i quadrati perfetti di **m** ed **n.**

Da quanto premesso si ricava anche che, secondo tali formule, la possibilità di ottenere terne primitive è ottenibile soltanto abbinando contestualmente valori alternativi pari/dispari ad **m** ed **n**.

Incuriosito da ciò ho fatto una ricerca sul web per verificare se esistono formule alternative che consentono di trovare terne pitagoriche primitive assegnando entrambi valori dispari sia a **m** che **n** senza trovarne traccia, probabilmente perché, considerata l'indiscussa autorità di Euclide, a nessun matematico è mai venuto in mente di valutare la possibilità di trovare un percorso alternativo, forse anche per la convinzione che pur trovando una qualche formula alternativa, essa, ovviamente, non potrebbe aumentarne la quantità, non considerando, tuttavia, che una indagine in tale direzione, se positivamente risolta, potrebbe offrire una visione più approfondita della "interiorità" dei numeri, ovvero di captarne l'aspetto "ontologico" nel senso filosofico heideggeriano di "essenza categoriale". Fatto sta che neanche sulla pagina dedicata di Wikipedia si trova il minimo accenno a una formula generale diversa da quella classica attribuita ad Euclide.

Cimentandomi a fare alcune prove in tale direzione ho elaborato una formula generale, alternativa a quella di Euclide, la quale, **assegnando sia ad "m" che "n" valori dispari,** consente di ottenere, così come quella di Euclide, tutte le infinite possibilità di terne pitagoriche primitive**,** aggiungendo due inediti aspetti, dei quali uno particolarmente interessante in quanto pone sotto nuova luce l'identità di **m** ed **n**, facendo loro assumere l'intrinseca funzione di "fattori" del cateto dispari "**a"** delle terne pitagoriche, il quale, di conseguenza, come una delle tre ruote del triciclo, assume funzione di guida.

Nuove formule dei tre lati del triangolo rettangolo:

Con **m** ed **n** entrambi numeri interi dispari ed m > n, assegnando ad **a** il valore del prodotto di **m** che moltiplica **n**, si ricava che
a= mn;

successivamente, nella considerazione che attribuendo tali valori ad **m** ed **n**, ciascun quadrato perfetto di **m** è uguale alla somma dei valori del cateto **b** e della ipotenusa **c, cioè:**
$m^2 = b+c$;

e valutando che ciascun quadrato perfetto di **n** è uguale alla differenza fra il valore della ipotenusa **c** e il valore del cateto **b**, cioè,

$n^2 = c–b$;

-considerando che:
$m^2 + n^2 =(c+b) + (c-b) = 2c + b-b = \mathbf{2c},$
si ricava che
$\mathbf{c= (m^2+n^2)/2;}$

- mentre, considerando che
$m^2 – n^2 = (c + b) - (c – b) = 2b + c-c = \mathbf{2b},$
si ricava che
$\mathbf{b= (m^2 – n^2)/2;}$
ottenendo, infine, la seguente formula generale:

$$\mathbf{a= mn;}$$
$$\mathbf{b = [(m^2-n^2)/2];}$$
$$\mathbf{c = [(m^2+n^2)/2]}$$

tale che con **m** ed **n** coprimi, $\mathbf{a^2+b^2 = c^2}$ è sempre una terna pitagorica primitiva (salvo che m ed n non siano coprimi e, quindi, avendo fra loro divisori in comune, è una terna pitagorica derivata). Da tali formule si ottiene pertanto la seguente equazione che soddisfa ciascuna delle infinite terne pitagoriche possibili:

$$\mathbf{(mn)^2 + [(m^2-n^2)/2]^2 = [(m^2+n^2)/2]^2}$$

A tal proposito, a titolo esemplificativo, coi primi valori di **m** ed **n**, ho predisposto in ordine cronologico alcune delle infinite tabelle realizzabili (20 tabelle contenenti circa 42 diverse terne ciascuna). Ciascuna di tali tabelle, estensibili all'infinito, raggruppando gli abbinamenti di uguale differenza fra **m** ed **n**, (la prima con differenza 2, la seconda con differenza 4, la terza con differenza 6, ecc.) rappresenta solo i primi valori di una serie infinita, diversa da ciascuna delle altre, ed è ovvio che essendo infinite le distanze possibili fra **m** ed **n**, infinite sono pure le serie realizzabili.

Così come la formula generale fornita da Euclide è valida per ciascuna serie (mano a mano diversificandosi in dipendenza degli infiniti valori attribuibili a **m** ed **n**) anche le formule da me trovate restano sempre utilizzabili per ciascuna serie, fermo restando che a ciascuna serie può essere anche attribuita una formula ad hoc, valida soltanto per quella serie.

La diversa elaborazione delle strutture delle formule mi ha consentito di notare una costante caratteristica delle terne pitagoriche che è quella che ciascuna di esse, sempre formata da tre distinti numeri **a, b, c**, assume una sua precisa identità in dipendenza dei diversi valori entrambi dispari attribuibili ad **m** ed **n**.

Più specificatamente emerge il fatto che **m** ed **n** costituiscono sempre le **coppie di fattori del cateto dispari** in virtù del quale tale cateto assume l'aspetto trainante della terna pitagorica mentre gli altri due lati (cateto pari e ipotenusa) assumono aspetti secondari in quanto le loro misure (sia pure rapportate ai valori di **m** ed **n**, coppia di fattori del lato a, e quindi ad essa connesse) sono proporzionali ai valori quadratici delle terne pitagoriche.

Da quanto appena detto diventa evidente che essendo ciascun numero naturale intero dispari scomponibile in una o più coppie di fattori, in dipendenza del fatto che esso sia numero primo oppure numero composto, si comprende che quando il cateto dispari del triangolo rettangolo è formato da un numero primo, esistendo una sola coppia di fattori **m, n,** che forma tale numero, ciascun numero primo diviene cateto dispari del triangolo rettangolo una sola volta.
Al contrario ciascun numero dispari "composto" assume dimensione di cateto del triangolo rettangolo tante volte quante sono le coppie di fattori che lo formano.

Ad esempio:
-Le coppie di fattori che formano il numero 21 sono:
21= 21x1;
21 =7x3
in entrambi i casi il fattore maggiore si associa ad **m** ed il minore ad **n**. In virtù di tali scomposizioni il numero composto 21 è cateto dispari delle terne pitagoriche primitive:
21, 20, 29; determinata dai valori m=7, n=3;
21, 220, 221; determinata dai valori m=21, n=1.

-Le coppie dei fattori che formano il numero 45 sono:
45= 45x1;
45 = 15x3;
45 = 9x5;

In virtù di tali scomposizioni il numero composto 45 è cateto dispari delle seguenti terne pitagoriche:

$45^2 + 1012^2 = 1013^2$; determinata dai valori m=45, n=1;
$45^2 + 108^2 = 117^2$; determinata dai valori m=15, n=3;
$45^2 + 28^2 = 53^2$; determinata dai valori m= 9, n=5;

Di tali terne, prima e terza sono primitive mentre la seconda è derivata essendo che i due fattori m=15 ed n=3 hanno in comune il divisore 3.

-Le coppie dei fattori che formano il numero 105 sono:

105= 105x1;
105 = 35x3;
105 = 21x5;
105 = 15x7.

Come anzidetto, il fattore maggiore si associa ad **m** ed il minore ad **n**. In virtù di tali scomposizioni il numero composto 105 assume valore di cateto dispari delle seguenti terne pitagoriche primitive:

$105^2 + 5512^2 = 5513^2$; determinata dai valori m=105, n=1;
$105^2 + 608^2 = 617^2$; determinata dai valori m=35, n=3;
$105^2 + 208^2 = 233^2$; determinata dai valori m=21, n=5;
$105^2 + 88^2 = 137^2$; determinata dai valori m=15, n=7.

I valori delle ipotenuse delle quattro terne, essendo rappresentati da numeri primi, escludono qualsiasi nesso diretto dei loro fattori (1, n) con quelli dei rispettivi cateti dispari, nel senso che il valore di n assunto per il cateto dispari è diverso da quello assunto per l'ipotenusa. Il che conferma che il rapporto fra cateti dispari e ipotenuse, dipendendo da somme e prodotti di entrambi i fattori m, n, è funzionale al valore dei rapporti fra rispettivi quadrati perfetti.

-Le coppie dei fattori che formano il numero 1155 sono:
1155 = 1155x1;
1155 = 385x3;
1155 = 231x5;
1155 = 165x7;
1155 = 105x11;
1155 = 77x15;
1155= 55x21;
1155= 35x33;

Al solito, i fattori maggiori si associano ad **m**, i minori ad **n**. In virtù di tali scomposizioni il numero composto 1155 assume valore di cateto dispari delle seguenti terne pitagoriche, tutte primitive:

$1155^2 + 667012^2 = 667013^2$; determinata dai valori m=1155, n=1;
$1155^2 + 74108^2 = 74117^2$; determinata dai valori m=385, n=3;
$1155^2 + 26668^2 = 26693^2$; determinata dai valori m=231, n=5;
$1155^2 + 13588^2 = 13637^2$; determinata dai valori m=165, n=7;
$1155^2 + 5512^2 = 5573^2$; determinata dai valori m=105, n=11;
$1155^2 + 2852^2 = 3077^2$; determinata dai valori m=77, n=15;
$1155^2 + 1292^2 = 1733^2$; determinata dai valori m=55, n=21;
$1155^2 + 136^2 = 1157^2$; determinata dai valori m=35, n=33;

Quattro delle otto ipotenuse sono numeri primi. Le altre quattro sono divisibili ciascuna per una diversa coppia di numeri primi che non ha divisori in comune con le coppie di fattori del cateto dispari, confermando totale estraneità coi rispettivi valori di **m** ed **n** e tuttavia ad essi collegati proporzionalmente tramite valori dei loro quadrati perfetti;

1157 = 13x89;
1733 primo,
3077= 17x181,
5573=primo,
13637=13x1049;
26693= primo;
74117= 137x541;
667013= primo

ciò conferma che ciascuna terna pitagorica primitiva è sempre guidata dal cateto dispari che, a sua volta, a prescindere dalla sua dimensione, può fornire una o molteplici terne pitagoriche primitive a seconda che il suo valore corrisponda a un numero primo oppure sia divisibile per due o più coppie di numeri coprimi. Nella sua veste di cateto dispari del triangolo rettangolo, il numero 1155, come visto, fornisce 8 terne pitagoriche primitive, (non consideriamo le 14 volte che esso, invece, assume valore di cateto dispari di terna pitagorica derivata essendo contemporaneamente multiplo dei numeri 3, 5, 7, 11, 15, 21, 33, 35, 55, 77, 105, 165, 231, 385) mentre il suo precedente dispari 1153, essendo numero primo, assume solo una volta la funzione di cateto dispari del triangolo rettangolo formando la terna pitagorica primitiva 1153, 664704, 664705.

Utilizzando le formule di Euclide, attribuendo ad **m** ed **n** valori alternativamente pari e dispari, con **m>n**, le terne pitagoriche derivate si ricavano se **m** ed **n** hanno dei divisori comuni (esempio: m=12 ed n=9), mentre con **m** ed **n** aventi valori entrambi dispari oppure entrambi pari, si ottengono sempre delle terne pitagoriche derivate.

Tramite le formule da me individuate, come anzidetto, con **m** ed **n** entrambi dispari, le terne pitagoriche derivate si ricavano quando, i due fattori del cateto dispari hanno dei divisori comuni, ed anche quando, raramente, i tre lati hanno divisori comuni, mentre quando sia **m** che **n** assumono contemporaneamente valori pari si ottengono sempre terne pitagoriche derivate.

Terne pitagoriche formate da numeri razionali con decimale limitato

Altra particolare singolarità delle formule generali da me elaborate è quella che, quando a **m** ed **n** si attribuiscono un valore dispari e uno pari (ad esempio 7, 4) i lati **b** e **c** del triangolo rettangolo assumono valori razionali con decimale limitato a una cifra cioè un numero intero seguito da un decimale uguale 0,5 (cioè metà di 1), e di conseguenza i rispettivi quadrati perfetti assumono valore con decimale limitato a due cifre sempre uguale a 0,25, cioè un quarto dell'intero il che consente di ottenere delle proporzioni di triangoli rettangoli più ridotte rispetto a quelle note, con misure sempre fra loro congrue e perfettamente proporzionate il cui triangolo rettangolo più piccolo ottenibile si ricava attribuendo ad **m** ed **n** i valori interi 2 e 1 i quali producono la equazione $2^2 + (1{,}5)^2 = (2{,}5)^2$

m=2, n=1;
a= mn = 2x1 = 2;
b= $[(2^2\text{-}1^2)/2] = [3/2] = 1{,}5$;
c= $[(2^2+1)/2] = [5/2] = 2{,}5$;

quindi
$2^2 + (1{,}5)^2 = (2{,}5)^2$
---
m = 3, n=2;
a= 3x2 = 6;
b= $[(3^2\text{-}2^2)/2\ ] = [5/2 - 2^2] = 2{,}5$;
c= $[(3^2+2^2)/2] = [13/2] = 6{,}5$;

quindi
$6^2 + (2{,}5)^2 = (6{,}5)^2$

Oltre a quanto già asserito, lo studio mi ha indotto a considerare alcune susseguenti peculiari caratteristiche che scaturiscono dai rapporti dei valori quadratici di a, b, c, e dalle implicazioni che m ed n assumono essenzialmente valore di fattori del cateto dispari del triangolo rettangolo. Va da se che, aprendosi un territorio finora inesplorato, in virtù di tale inedita prospettiva, si possono trovare diverse altre caratteristiche e/o proprietà delle terne pitagoriche non ancora individuate. Fra quelle intraviste ne propongo una che risponde alla domanda: "*Perché, a parte le due terne pitagoriche 3,4,5 e 5,12,13, in tutte le altre terne pitagoriche i cui due lati dispari sono contemporaneamente numeri primi, l'ipotenusa ha sempre quale ultima cifra il numero 1?*" La risposta dettagliata a tale quesito si trova a pagina 81 del libro.

Filippo Giordano

TERNE PITAGORICHE PRIMITIVE

Formule complementari con M ed N entrambi dispari

m	n	a	b	c
3	1	3	4	5
5	3	15	8	17
7	5	35	12	37
9	7	63	16	65
11	9	99	20	101
5	1	5	12	13
7	3	21	20	29
9	5	45	28	53
11	7	77	36	85
13	9	117	44	125
7	1	7	24	25
9	3	27	36	45
11	5	55	48	73
13	7	91	60	109
15	9	135	72	153

youcanprint